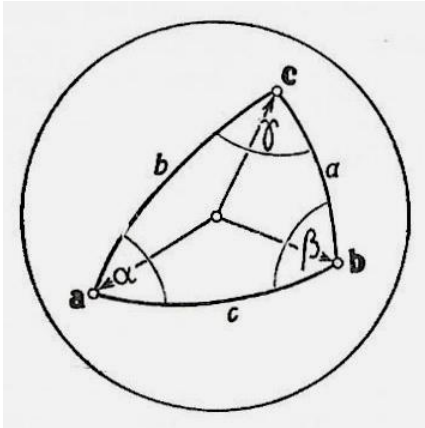


Egy tetőgeometriai alapképlet skaláris levezetése

A skaláris itt azt jelenti, hogy nem vektoros. Ugyanis eredetije az [1] műben vektor - algebrai úton lett levezetve. Ez a már többször elővett gömbháromszögtani képlet – a *szö - gekre vonatkozó koszinusztétel* – az 1. ábra jelöléseivel így fest:



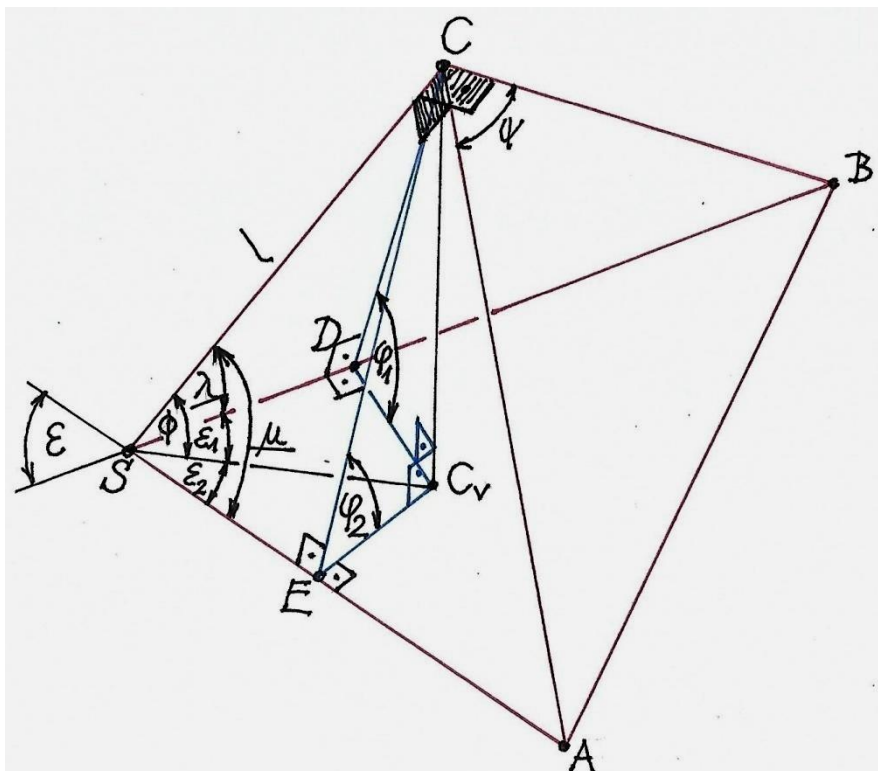
1. ábra – forrása: [1]

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c . \quad (K)$$

A (K) képletben szereplő betűjeleket az 1. ábra azonosítja be.

Az alábbiakban áttérünk saját megszokott, illetve újabban bevezetett jelöléseinkre.

A folytatáshoz tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

Itt egy derékszögű gúlát ábrázoltunk. Ennek az **ABC** alapsíkjára merőleges az **l** magassága. Tetőgeometriai szóhasználatlalt az egyes mennyiségek megnevezése az alábbi:

- ~ a **BS** szakasz az **S** ereszsarokba befutó egyik (e_1) ereszvonal egy darabja;
- ~ az **SA** szakasz az **S** ereszsarokból induló másik (e_2) ereszvonal egy darabja;
- ~ az ε szög az ereszvonalak által bezárt (kisebbik) szög az *ereszsíkban*;
- ~ az **l** magasság egyben az **ASC** és **BSC** tetősíkok metszésvonalának – az *élgerincnek* – egy szakasza;
- ~ a C_v pont a gúla **C** csúcsának az ereszsíkra vett merőleges vetülete;
- ~ az **SC_v** szakasz az **l** szakasz merőleges vetülete az ereszsíkra, mely az ε szöget ε_1 és ε_2 részekre osztja;
- ~ az e_1 ereszvonalból induló *tetősík hajlása* – az ereszsíkkal bezárt szöge – φ_1 , az e_2 ereszvonalból induló tetősík hajlása φ_2 ;
- ~ a **D** és **E** pontok azok az *ereszpontok*, ahol az illető eresz vonalát elmetszettük egy az ereszvonalra merőleges síkkal, ami az ereszsíkból és az illető tetősíkból kimetszette a φ_1 és a φ_2 hajlásszögek szarait;
- ~ a λ szög a **CSD** derékszögű háromszög e_1 ereszen nyugvó hegyesszöge;
- ~ a μ szög a **CSE** derékszögű háromszög e_2 ereszen nyugvó hegyesszöge;
- ~ a ϕ szög az élgerincnek az ereszsíkkal bezárt szöge;
- ~ a ψ szög az **SAC** és az **SBC** tetősíkok *lapszöge*, melyet úgy kapunk, hogy az élgerincet elmetsszük a **C** pontban egy rá merőleges **ABC** síkkal, ami a tetősíkokból kimetszi a **CA** és **CB** szakaszokat, melyek a ψ szöget zárják be.

A számítást azzal kezdjük, hogy az **AB** szakasz hosszát kétféleképpen is felírjuk, két koszinusztétellel:

$$\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CB} \cdot \cos \psi ; \quad (1)$$

a hozzávalók:

$$\overline{CA} = l \cdot \operatorname{tg} \mu , \quad \overline{CB} = l \cdot \operatorname{tg} \lambda ; \quad (2)$$

most (1) és (2) - vel:

$$\overline{AB}^2 = l^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \mu + l^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \lambda - 2 \cdot l^2 \cdot \operatorname{tg} \mu \cdot \operatorname{tg} \lambda \cdot \cos \psi . \quad (3)$$

Hasonlóképpen:

$$\overline{AB}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 - 2 \cdot \overline{SA} \cdot \overline{SB} \cdot \cos \varepsilon ; \quad (4)$$

a hozzávalók:

$$\overline{SA} = \frac{l}{\cos \mu} , \quad \overline{SB} = \frac{l}{\cos \lambda} ; \quad (5)$$

majd (4) és (5) - tel:

$$\overline{AB}^2 = \frac{l^2}{\cos^2 \mu} + \frac{l^2}{\cos^2 \lambda} - 2 \cdot l^2 \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\cos \mu \cdot \cos \lambda} . \quad (6)$$

Ezután (3) és (6) - tal:

$$l^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \mu + l^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \lambda - 2 \cdot l^2 \cdot \operatorname{tg} \mu \cdot \operatorname{tg} \lambda \cdot \cos \psi = \frac{l^2}{\cos^2 \mu} + \frac{l^2}{\cos^2 \lambda} - 2 \cdot l^2 \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\cos \mu \cdot \cos \lambda} ; \quad (7)$$

(7) - ből átalakításokkal:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \mu + \operatorname{tg}^2 \lambda - 2 \cdot \operatorname{tg} \mu \cdot \operatorname{tg} \lambda \cdot \cos \psi &= \frac{1}{\cos^2 \mu} + \frac{1}{\cos^2 \lambda} - 2 \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\cos \mu \cdot \cos \lambda} , \\ \operatorname{tg}^2 \mu + \operatorname{tg}^2 \lambda - 2 \cdot \operatorname{tg} \mu \cdot \operatorname{tg} \lambda \cdot \cos \psi &= 1 + \operatorname{tg}^2 \mu + 1 + \operatorname{tg}^2 \lambda - 2 \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\cos \mu \cdot \cos \lambda} , \\ -2 \cdot \operatorname{tg} \mu \cdot \operatorname{tg} \lambda \cdot \cos \psi &= 2 - 2 \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\cos \mu \cdot \cos \lambda} , \\ \operatorname{tg} \mu \cdot \operatorname{tg} \lambda \cdot \cos \psi &= \frac{\cos \varepsilon}{\cos \mu \cdot \cos \lambda} - 1 , \\ \operatorname{tg} \mu \cdot \operatorname{tg} \lambda \cdot \cos \psi &= \frac{\cos \varepsilon - \cos \mu \cdot \cos \lambda}{\cos \mu \cdot \cos \lambda} , \\ \frac{\sin \mu}{\cos \mu} \cdot \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \cdot \cos \psi &= \frac{\cos \varepsilon - \cos \mu \cdot \cos \lambda}{\cos \mu \cdot \cos \lambda} , \\ \sin \mu \cdot \sin \lambda \cdot \cos \psi &= \cos \varepsilon - \cos \mu \cdot \cos \lambda , \\ \cos \psi &= \frac{\cos \varepsilon - \cos \lambda \cdot \cos \mu}{\sin \lambda \cdot \sin \mu} . \end{aligned} \quad (8)$$

Most kiszámítjuk a (8) képletben szereplő, még ismeretlen szögfüggvényeket.

A 2. ábra alapján írhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{\overline{SD}}{l} = \frac{l \cdot \cos \phi \cdot \cos \varepsilon_1}{l} = \cos \phi \cdot \cos \varepsilon_1 , \text{ tehát:} \\ \cos \lambda &= \cos \phi \cdot \cos \varepsilon_1 ; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sin \lambda &= \frac{\overline{CD}}{l} = \frac{l \cdot \sin \phi / \sin \varphi_1}{l} = \frac{\sin \phi}{\sin \varphi_1} , \text{ tehát:} \\ \sin \lambda &= \frac{\sin \phi}{\sin \varphi_1} . \end{aligned} \quad (10)$$

Folytatva:

$$\begin{aligned} \cos \mu &= \frac{\overline{SE}}{l} = \frac{l \cdot \cos \phi \cdot \cos \varepsilon_2}{l} = \cos \phi \cdot \cos \varepsilon_2 , \text{ tehát:} \\ \cos \mu &= \cos \phi \cdot \cos \varepsilon_2 ; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sin \mu = \frac{\overline{CE}}{l} = \frac{l \cdot \sin \phi / \sin \varphi_2}{l} = \frac{\sin \phi}{\sin \varphi_2} , \text{ tehát:}$$

$$\sin \mu = \frac{\sin \phi}{\sin \varphi_2} . \quad (12)$$

Ezután (8), (9), (10), (11), (12) - vel:

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{\cos \varepsilon - \cos \phi \cdot \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \phi \cdot \cos \varepsilon_2}{\frac{\sin \phi}{\sin \varphi_1} \cdot \frac{\sin \phi}{\sin \varphi_2}} = \frac{\cos \varepsilon - \cos^2 \phi \cdot \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2}{\sin^2 \phi} \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = \\ &= \frac{\cos \varepsilon - (1 - \sin^2 \phi) \cdot \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2}{\sin^2 \phi} \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \rightarrow \\ \cos \psi &= \frac{\cos \varepsilon - \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 + \sin^2 \phi \cdot \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2}{\sin^2 \phi} \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 ; \end{aligned} \quad (13)$$

Felhasználjuk, hogy:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 , \quad (14)$$

valamint (14) - gyel is, hogy:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &= \cos(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 - \sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2 \rightarrow \\ \cos \varepsilon - \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 &= -\sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2 . \end{aligned} \quad (15)$$

Majd (13) és (15) szerint:

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{-\sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2 + \sin^2 \phi \cdot \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2}{\sin^2 \phi} \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = \\ &= \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \left(\frac{-\sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2}{\sin^2 \phi} + \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \right) = \\ &= \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \left(-\sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2 \cdot \frac{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi}{\sin^2 \phi} + \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \right) = \\ &= \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \left[-\sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \phi} \right) + \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \right] = \\ &= \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \left[-\sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2 - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \phi} \cdot \sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2 + \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \right] = \\ &= \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \left(\cos \varepsilon - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \phi} \cdot \sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2 \right) , \quad \text{tehát:} \\ \cos \psi &= \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \left(\cos \varepsilon - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \phi} \cdot \sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2 \right) . \end{aligned} \quad (16)$$

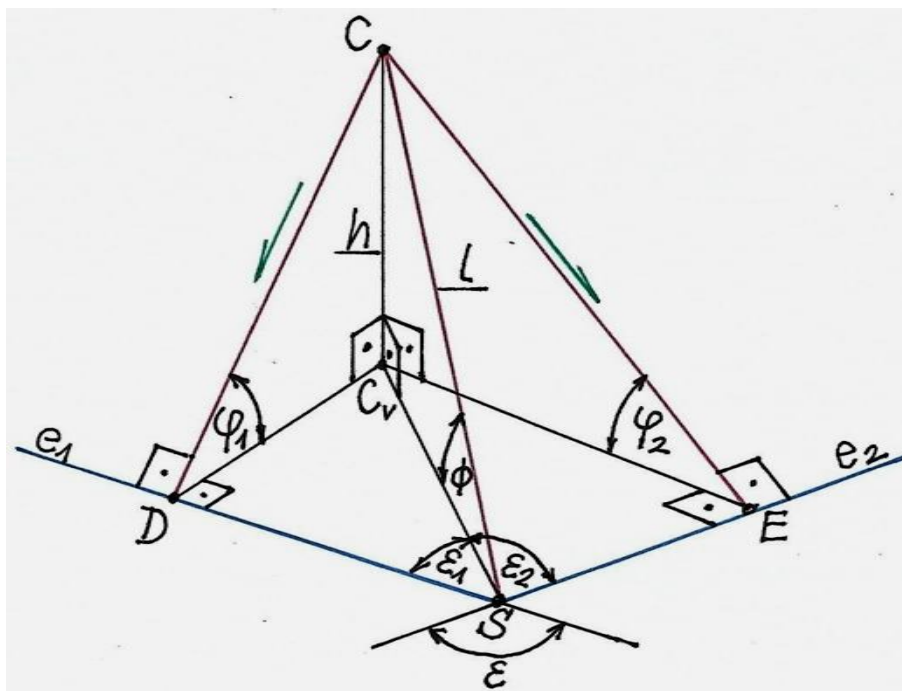
Most felállítjuk a ϕ - re vonatkozó összefüggést, kiküszöbölve ezzel a ϕ szöget (16) - ból.

Ehhez tekintsük a 2. ábrából kiemelt 3. ábrát! Innen:

$$h = l \cdot \sin \phi = l \cdot \cos \phi \cdot \sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \rightarrow \operatorname{tg} \phi = \sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 , \quad (17 / 1)$$

$$h = l \cdot \sin \phi = l \cdot \cos \phi \cdot \sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 \rightarrow \operatorname{tg} \phi = \sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 , \quad (17 / 2)$$

azaz:



3. ábra

$$\operatorname{tg} \phi = \sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = \sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 \rightarrow \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\sin \varepsilon_2}{\sin \varepsilon_1} . \quad (18)$$

Most (16) és (17) - tel:

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \left(\cos \varepsilon - \frac{1}{\sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2} \cdot \sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2 \right) = \\ &= \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \left(\cos \varepsilon - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2} \right) = \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \left(\cos \varepsilon - \frac{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2} \right) = \\ &= \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varepsilon - \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 , \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos \psi = -\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varepsilon .} \quad (19)$$

A (19) képlet már a végeredmény. Ugyanis az 1. és a 18. ábrák szögei közti

$$\gamma \rightarrow \psi , \beta \rightarrow \varphi_1 , \alpha \rightarrow \varphi_2 \quad (20)$$

megfeleltetésekkel (19) - ből előáll (K) és megfordítva.

Ezzel kitűzött feladatunkat megoldottuk.

Egy fontos speciális eset: derékszögű ereszsarok.

Ebben az esetben: $\varepsilon = 90^\circ$, $\cos \varepsilon = 0$, így ekkor (19) így alakul:

$$\cos \psi|_{\varepsilon=90^\circ} = -\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \rightarrow \underline{\psi|_{\varepsilon=90^\circ} = \arccos(-\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)} . \quad (19^*)$$

Megjegyzések:

M1. A (K) képlet levezetését részletesen végigvettük egy korábbi dolgozatunkban, melynek jele és címe:

KD - 1.: Érdekes geometriai számítások – 5.

Egy fontos szögösszefüggés gömbháromszögtani igazolása

M2. A szögek átjelölésére azért van szükség, mert itt egy dolgozatban szerepel olyan sok szög, hogy kénytelenek vagyunk változtatni a korábbiakhoz képest, a zavarok elkerülése érdekében.

M3. A 2. ábra rajzolásánál két derékszög - jellel is kiemeltük a **C** , **D** , **E** pontokban azt a síkgeometriai tételt, miszerint egy egyenes merőleges egy síkra, ha merőleges a sík két egyenesére.

Például az **l** magasság merőleges az **ABC** síkra – és annak minden egyenesére –, ha merőleges annak **AC** és **BC** egyenesére is.

M4. A (8) képletet – más jelölésekkel – már levezettük egy korábbi dolgozatunkban, melynek jele és címe:

KD - 2.: Érdekes geometriai számítások – 10 .

M5. Van még itt egy elvarratlan szál: az ε szög ε_1 és ε_2 részekre osztása.

Ehhez az

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 , \quad (14)$$

és a

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\sin \varepsilon_2}{\sin \varepsilon_1} \quad (18 / 2)$$

egyenletek felhasználásával:

$$\sin \varepsilon_2 = \sin(\varepsilon - \varepsilon_1) = \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon_1 - \cos \varepsilon \cdot \sin \varepsilon_1 \rightarrow$$

$$\frac{\sin \varepsilon_2}{\sin \varepsilon_1} = \sin \varepsilon \cdot \frac{\cos \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_1} - \cos \varepsilon \cdot \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_1} \rightarrow \frac{\sin \varepsilon_2}{\sin \varepsilon_1} = \frac{\sin \varepsilon}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} - \cos \varepsilon \rightarrow$$

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\sin \varepsilon}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} - \cos \varepsilon \rightarrow \frac{\sin \varepsilon}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} = \cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} \rightarrow \operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}} , \text{ tehát:}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}} \right)}} \text{ és } \underline{\underline{\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1}} . \quad (21)$$

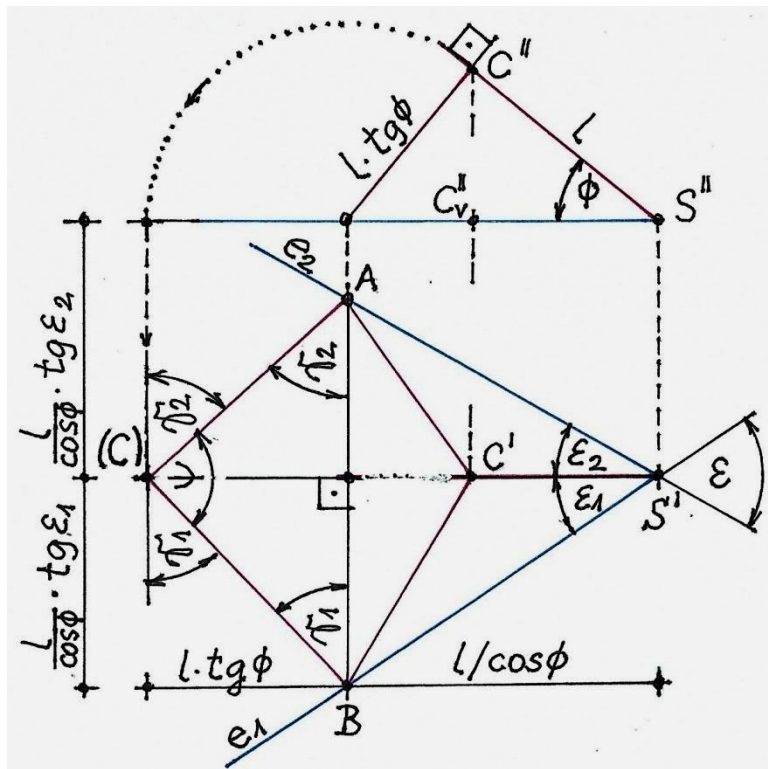
Könnyen megmutatható, hogy érvényes a (21 / 1) képlet párja is:

$$\underline{\underline{\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1}} \rightarrow \varepsilon_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1}} \right)}} \quad (22)$$

Az igazolást már rábizzuk az érdeklődő Olvasóra. Annál is inkább, mert ez már több korábbi dolgozatunkban is szerepelt. (Vagy itt rögtön kitalálható.)

M6. Itteni eredményeink másik korábbi eredményeinkhez is csatlakoznak.

Ehhez tekintsük a 4. ábrát is, melynek eredeti forrása a [2] műben található!



4. ábra

A felülnézeti képsíkba – az ereszsíkba – forgatott **ABC** háromszög **C** csúcsánál lévő belső szöge a keresett ψ lapszög – v. ö. a 2. ábrával! Ennek számítása itt:

$$\underline{\underline{\psi = 180^\circ - (\gamma_1 + \gamma_2)}} \quad (23)$$

Ehhez:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \phi}{\frac{l}{\cos \phi} \cdot \operatorname{tg} \varepsilon_1} = \frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_1}, \text{ tehát: } \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} \rightarrow \underline{\underline{\gamma_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} \right)}}; \quad (24 / 1)$$

hasonlóan:

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \phi}{\frac{l}{\cos \phi} \cdot \operatorname{tg} \varepsilon_2} = \frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_2}, \text{ tehát: } \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_2} \rightarrow \underline{\underline{\gamma_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_2} \right)}}. \quad (24 / 2)$$

Úgy is mondhatjuk: olyanok, akiknél már tétre megy ez a játék.

M9. Mondhatjuk, hogy a gömb - és a síkháromszögtani alapon levezetett (K) és (19) képletek egyezősége is rámutat a gömbi és a triéder - geometria közti rokonságra. Erről továbbiakat is lehet találni pl. a [3] munkában.

M10. Javasoljuk az érdeklődő Olvasónak, hogy gyakorolja a képletek használatát, először lehetőleg már máshonnan ismert eredményű példákon. Ez segít a számológép használatát is megerősíteni. Merthogy hiába a jó képlet, ha nem tudjuk alkalmazni.

Továbbá tanácsos elkészíteni a saját vázlatrajzokat, magyarázó ábrákat is.

M11. A gyakorlást szolgálja az alábbi számpélda is.

SZÁMPÉLDA

A feladat

Egy kontytető ereszvonalai 120° - ot zárnak be egymással, az ereszvonalakból induló tetősíkok hajlása pedig 45° és 60° .

Határozzuk meg a tetősíkok lapszögét, mindkét módon!

A megoldás

Adott: $\varepsilon = 120^\circ$, $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$.

Keresett: ψ .

I. mód

$$\begin{aligned}\psi &= \arccos(-\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varepsilon) = \\ &= \arccos(-\cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 120^\circ) = 131,2800169^\circ ,\end{aligned}$$

tehát:

$$\underline{\psi = 131,2800169^\circ} . \quad (E1)$$

II. mód

$$\varepsilon_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ + \frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ}}\right) = 84,89609064^\circ ;$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 = 120^\circ - 84,89609064^\circ = 35,10390936^\circ.$$

$$\operatorname{tg} \phi = \sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = \sin 84,89609064^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 0,9960349977,$$

$$\phi = \operatorname{arctg}(0,9960349977) = 44,88618556^\circ.$$

(Ellenőrzés:

$$\operatorname{tg} \phi = \sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = \sin 35,10390936^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 0,9960349977. \text{ OK.})$$

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin 44,88618556^\circ}{\operatorname{tg} 84,89609064^\circ}\right) = 3,606619072^\circ ;$$

$$\gamma_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varepsilon_2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin 44,88618556^\circ}{\operatorname{tg} 35,10390936^\circ}\right) = 45,11336407^\circ.$$

$$\psi = 180^\circ - (\gamma_1 + \gamma_2) = 180^\circ - (3,606619072^\circ + 45,11336407^\circ) = 131,2800169^\circ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{\psi = 131,2800169^\circ.}} \quad (\text{E2})$$

Látjuk, hogy (E1) és (E2) pontosan megegyezik. Eszerint a végeredmény kerekítve:

$$\underline{\underline{\psi = 131,3^\circ.}} \quad (\text{E})$$

Tehát a tetősíkok lapszöge mintegy **131,3°**.

M12. Az a tény, hogy a számpélda kétféle úton kapott eredményei megegyeznek, azt is jelzi, hogy jók a képletek, és a számológép kezelése is rendben megy.

Lehet, hogy a második számítási mód hosszabb, de több fontos információt is megad, mint az első. Így pl. az élszarufa ϕ hajlását, valamint a γ_1 , γ_2 megmunkálási szögeit is.

Javasoljuk, hogy a számítások során menet közben ne kerekítsünk! Így a kétféle módon számított eredmények valóban egyezni tudnak, ha jók. Ez kicsit kényelmetlen, de megéri.

M13. Ajánlható a szerkesztéses és a számításos megoldási módok együttes alkalmazása.

Így pl. arról is képet kaphatunk, hogy kézi szerkesztésünk mennyire lett pontos.

M14. Itt az élgerinc esetével foglalkoztunk. A vápa esete is hasonló, kis különbséggel.

M15. Itt is elmondjuk, hogy a nyugat - európai országok (pl. Németország) szakképzésé - ben már elég régen megtalálhatók a szögfüggvényekkel történő számítások, amilyenek az itteniek is. Nálunk ez még nem honosodott meg, bár már vannak erre vonatkozó kezdemé -

nyezések. A nagy kérdés az, hogy mikor lesznek hajlandóak a fiatal / tanuló és a már nem annyira fiatal / oktató szakemberek a fentiekhez hasonló számításokkal érdemben foglalkozni. Ez alatt azt is értjük, hogy a matematikai alapozás is megvalósul, ehhez illeszkedő új tankönyvek készülnek, a tanárok és az oktatók is elszakadnak valamelyest a régi gyakorlatától és beidegződésektől, stb. Itt is megemlíthetjük, hogy szükség lenne az új szemléletű szak - és tankönyvekre, valamint egy olyan ács folyóíratra is, mint a **Der Zimmermann**. A több évtizedes lemaradás behozása nem egyszerű, sokáig tart, és már most érdemben is tenni kellene a "szakmai felzárkóztatás" megvalósításáért. Az erről való beszélgetés már nem elég.

M16. Határozzuk meg az 5. ábra szerinti gúla térfogatát, ha szög - adatai egyeznek az előző feladatbeliekkel, a magassága pedig **1 m** !

Adatok:

$$l = 1 \text{ m} , \quad \phi = 44,88618556^\circ , \quad \varepsilon_1 = 84,89609064^\circ , \quad \varepsilon_2 = 35,10390936^\circ .$$

Ezekkel:

$$\begin{aligned} V_{ABCS} &= \frac{1}{6} \cdot l^3 \cdot \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi} \cdot (\operatorname{tg} \varepsilon_1 + \operatorname{tg} \varepsilon_2) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 \text{ m}^3 \cdot \frac{\sin 44,88618556^\circ}{\cos^2 44,88618556^\circ} \cdot (\operatorname{tg} 84,89609064^\circ + \operatorname{tg} 35,10390936^\circ) = \\ &= 2,787983744 \text{ m}^3 \approx 2,788 \text{ m}^3 , \text{ tehát:} \\ \underline{\underline{V_{ABCS} \approx 2,788 \text{ m}^3}} & \quad (V) \end{aligned}$$

Tehát a gúla térfogata mintegy **2,788 m³** .

M17. További szögösszefüggések is felírhatók szögparamétereink között.

Például a (9), (10), (11), (12) és (17) képletekkel:

$$\begin{aligned} \sin \lambda &= \frac{\sin \phi}{\sin \varphi_1} , \quad \cos \lambda = \cos \phi \cdot \cos \varepsilon_1 , \\ \sin \mu &= \frac{\sin \phi}{\sin \varphi_2} , \quad \cos \mu = \cos \phi \cdot \cos \varepsilon_2 , \\ \operatorname{tg} \phi &= \sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 , \\ \operatorname{tg} \phi &= \sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 ; \end{aligned}$$

ezekkel:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda &= \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} = \frac{\frac{\sin \phi}{\sin \varphi_1}}{\cos \phi \cdot \cos \varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varepsilon_1} = \frac{\sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1}{\cos \varphi_1} , \text{ tehát:} \\ \underline{\underline{\operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1}{\cos \varphi_1}}} & \rightarrow \underline{\underline{\lambda = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1}{\cos \varphi_1} \right)}} ; \quad (28 / 1) \end{aligned}$$

hasonlóan:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \mu &= \frac{\sin \mu}{\cos \mu} = \frac{\frac{\sin \phi}{\sin \varphi_2}}{\cos \phi \cdot \cos \varepsilon_2} = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sin \varphi_2 \cdot \cos \varepsilon_2} = \frac{\sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}{\sin \varphi_2 \cdot \cos \varepsilon_2} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_2}{\cos \varphi_2}, \text{ tehát:} \\ \underline{\underline{\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_2}{\cos \varphi_2} \rightarrow \mu = \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} \varepsilon_2}{\cos \varphi_2}\right)}}. \end{aligned} \quad (28 / 2)$$

A λ , μ szögekre is szükség lehet a szerkezet megépítése során. Meghatározásuk a már ismert adatok és részeredmények birtokában pl. így könnyen és gyorsan megy.

A (28) képletek kapcsán megemlítjük, hogy így levezetve nem okoznak semmilyen nehézséget. Ha azonban hasonló képletek tucatjait látnánk egy képletgyűjteményben, akkor főhetne a fejünk: „Ezeket biztosan nem tévesztették el sehol sem?”

A honi probléma először is az, hogy nincs ilyen (publikus), magyar nyelvű ács képletgyűjtemény, amit sajtóhibák terhelhetnek. (Tudjuk, van olyan más szakmai képletgyűjtemény, melyben a sajtóhibák komoly zavart okozhatnak, például a vizsgázóknak.)

Ha jobban szeretünk olyan képletekkel dolgozni, melyekben csak bemenő adatok szerepelnek, akkor – vállalva a terjedelmesebb képletalakokat – (21), (22) és (28) szerint:

$$\lambda(\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon) = \arctg\left(\frac{1}{\cos \varphi_1} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2}}\right), \quad (29 / 1)$$

$$\underline{\underline{\mu(\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon) = \arctg\left(\frac{1}{\cos \varphi_2} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1}}\right)}}. \quad (29 / 2)$$

M18. Az előbb a képletgyűjtemények hiányáról is szót ejtettünk. Jelen írásunkban sok képletet levezettünk, melyekből már képletgyűjtemény készíthető. Javasoljuk, hogy a téma iránt komolyan érdeklődő Olvasó tegyen így!

M19. Vegyük észre, hogy az 5. ábrán szereplő összes bejelölt szöget kifejeztük a φ_1 , φ_2 , ε bemenő adatokkal. Az ott fel nem tüntetett szögekre talán már nem is lesz szükség; kivéve azt a kevésbé valószínű esetet, hogy ha éppen egy ilyen rudazat megépítése a feladat.

M20. Látjuk, hogy a szögekre vonatkozó képletekből a l hosszúság kiesett. Ezt néha úgy használjuk fel, hogy $l = 1$ (m) választással élünk. Nem ez a helyzet a (27) térfogat-képlet esetében, ahol az eredmény l^3 -tól függ.

M21. Sokfelé elkalandoztunk a címbeli képlet apropóján. Reméljük, hasznosítható dolgokról volt itt szó. Emlékeztetőül: a felhasználás a forrás megjelölésével történik.

Források:

- [1] – **Hajós György**: Bevezetés a geometriába
6. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979., 281. o.
- [2] – **Lőrincz Pál ~ Petrich Géza**: Ábrázoló geometria
3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985., 72. o.
- [3] – **Reiman István**: A geometria és határterületei
Gondolat, Budapest, 1986., 76. o.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2021. 11. 12.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>